

Класификација квазилинейних парцијалних диференцијалних једначина другог реда

Свести на канонски облик једначину:

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yz} + 6u_{zz} = 0$$

Решение:

Нађимо систему променљивих постоје које ћемо дајти једначину
вести на канонски облик. Одговарајући квадрант форми је:

$$t_1^2 + 2t_1t_2 - 2t_1t_3 + 2t_2^2 + 6t_3^2 = K(t_1, t_2, t_3)$$

$$\begin{aligned} t_1^2 + 2t_1t_2 - 2t_1t_3 + 2t_2^2 + 6t_3^2 &= (t_1^2 + 2t_1t_2 - 2t_1t_3 + t_2^2 + t_3^2 - 2t_2t_3) - \\ &- t_2^2 - t_3^2 + 2t_2t_3 + 2t_2^2 + 6t_3^2 = (t_1 + t_2 - t_3)^2 + (t_2^2 + 2t_2t_3 + t_3^2) + 4t_3^2 = \\ &= (t_1 + t_2 - t_3)^2 + (t_2 + t_3)^2 + (2t_3)^2 \end{aligned}$$

$$\tau_1 = t_1 + t_2 - t_3$$

$$\tau_2 = t_2 + t_3$$

$$\tau_3 = 2t_3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$t_3 = \frac{\tau_3}{2}$$

$$t_2 = \tau_2 - \frac{\tau_3}{2}$$

$$t_1 = \tau_1 - \tau_2 + \tau_3$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (B^{-1})^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Смјена је дајна са

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x + y \\ x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \end{pmatrix}$$

Закључена је

$$\xi = x$$

$$\eta = -x + y$$

$$\zeta = x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$$

Задат је:

$$u_x = u_s \xi_x + u_\eta \eta_x + u_g \xi_x = u_s - u_\eta + u_g$$

$$u_y = u_s \xi_y + u_\eta \eta_y + u_g \xi_y = u_\eta - \frac{1}{2} u_g$$

$$u_z = u_s \xi_z + u_\eta \eta_z + u_g \xi_z = \frac{1}{2} u_s$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{ss} \xi_x + u_{s\eta} \eta_x + u_{sg} \xi_x - u_{\eta s} \xi_x - u_{\eta\eta} \eta_x - u_{\eta g} \xi_x + u_{ss} \xi_x + u_{g\eta} \eta_x + u_{gg} \xi_x = \\ &= u_{ss} + u_{\eta\eta} + u_{gg} - 2u_{s\eta} + 2u_{sg} - 2u_{g\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= u_{ss} \xi_y + u_{s\eta} \eta_y + u_{sg} \xi_y - u_{\eta s} \xi_y - u_{\eta\eta} \eta_y - u_{\eta g} \xi_y + u_{gs} \xi_y + u_{g\eta} \eta_y + u_{gg} \xi_y = \\ &= -u_{\eta\eta} - \frac{1}{2} u_{ss} + u_{s\eta} - \frac{1}{2} u_{sg} + \frac{3}{2} u_{\eta g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xz} &= u_{ss} \xi_z + u_{s\eta} \eta_z + u_{sg} \xi_z - u_{\eta s} \xi_z - u_{\eta\eta} \eta_z - u_{\eta g} \xi_z + u_{gs} \xi_z + u_{g\eta} \eta_z + u_{gg} \xi_z = \\ &= \frac{1}{2} u_{ss} + \frac{1}{2} u_{sg} - \frac{1}{2} u_{\eta g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= u_{\eta s} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y + u_{\eta g} \xi_y - \frac{1}{2} u_{ss} \xi_y - \frac{1}{2} u_{g\eta} \eta_y - \frac{1}{2} u_{gs} \xi_y = \\ &= u_{\eta\eta} + \frac{1}{4} u_{ss} - u_{\eta g} \end{aligned}$$

$$u_{zz} = \frac{1}{2} u_{ss} \xi_z + \frac{1}{2} u_{g\eta} \eta_z + \frac{1}{2} u_{gs} \xi_z = \frac{1}{4} u_{ss}$$

Уврштавање у почетну једначину добијемо:

$$\begin{aligned} &u_{ss} + u_{\eta\eta} + u_{gg} - 2u_{s\eta} + 2u_{sg} - 2u_{g\eta} - 2u_{\eta\eta} - u_{ss} + 2u_{s\eta} - u_{ss} + 3u_{\eta g} - u_{ss} - u_{sg} + u_{\eta g} + \\ &+ 2u_{\eta\eta} + \frac{1}{2} u_{ss} - 2u_{\eta g} + \frac{3}{2} u_{ss} = 0 \end{aligned}$$

$$u_{ss} + u_{\eta\eta} + u_{gg} = 0$$

Закључујемо да је дата партијална диференцијална једначина елиптичка типа

Ležnja na koordinatama odnosa je jednačina:

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} = 0$$

rešenje:

Osnovna jednačina z obzirom na formu je:

$$t_1^2 - 4t_1t_2 + 2t_1t_3 + 4t_2^2 + t_3^2 = 0$$

$$\begin{aligned} t_1^2 - 4t_1t_2 + 2t_1t_3 + 4t_2^2 + t_3^2 &= (t_1^2 - 4t_1t_2 + 2t_1t_3 + 4t_2^2 + t_3^2 - 4t_2t_3) + 4t_2t_3 = \\ &= (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 + 4t_2t_3 = \left[t_3 = t_2 + t_3 \right] - (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 + 4t_2^2 + 4t_2t_3 + t_3^2 - t_3^2 = \\ &= (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 + (2t_2 + t_3)^2 - t_3^2 = (t_1 - 2t_2 + t_3)^2 + (t_2 + t_3)^2 - (t_2 - t_3)^2 \end{aligned}$$

$$\xi_1 = t_1 - 2t_2 + t_3$$

$$\xi_2 = t_2 + t_3$$

$$\xi_3 = t_2 - t_3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$t_2 = \frac{\xi_2 + \xi_3}{2}$$

$$t_3 = \frac{\xi_2 - \xi_3}{2}$$

$$t_1 = \xi_1 + \frac{\xi_2 + \xi_3}{2} + \frac{3\xi_3}{2}$$

Срјена је гајна са $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (B^{-1})^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} \\ \frac{3x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} \end{pmatrix}$$

Дакле, срјена је

$$\xi = x$$

$$\eta = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2}$$

$$\zeta = \frac{3x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2}$$

Дана је:

$$u_x = u_s \delta_x + u_\eta \eta_x + u_g \delta_x = u_s + \frac{1}{2} u_\eta + \frac{3}{2} u_g$$

$$u_y = u_s \delta_y + u_\eta \eta_y + u_g \delta_y = \frac{1}{2} u_\eta + \frac{1}{2} u_g$$

$$u_z = u_s \delta_z + u_\eta \eta_z + u_g \delta_z = \frac{1}{2} u_\eta - \frac{1}{2} u_g$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{ss} \delta_x + u_{s\eta} \eta_x + u_{sg} \delta_x + \frac{1}{2} u_{s\eta} \delta_x + \frac{1}{2} u_{\eta\eta} \eta_x + \frac{1}{2} u_{\eta g} \delta_x + \frac{3}{2} u_{ss} \delta_x + \frac{3}{2} u_{s\eta} \eta_x + \frac{3}{2} u_{sg} \delta_x = \\ &= u_{ss} + \frac{1}{4} u_{\eta\eta} + \frac{9}{4} u_{gg} + u_{s\eta} + 3u_{sg} + \frac{3}{2} u_{\eta g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xy} &= u_{ss} \delta_y + u_{s\eta} \eta_y + u_{sg} \delta_y + \frac{1}{2} u_{s\eta} \delta_y + \frac{1}{2} u_{\eta\eta} \eta_y + \frac{1}{2} u_{\eta g} \delta_y + \frac{3}{2} u_{ss} \delta_y + \frac{3}{2} u_{s\eta} \eta_y + \frac{3}{2} u_{sg} \delta_y = \\ &= \frac{1}{4} u_{\eta\eta} + \frac{3}{4} u_{gg} + \frac{1}{2} u_{s\eta} + \frac{1}{2} u_{sg} + u_{s\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xz} &= u_{ss} \delta_z + u_{s\eta} \eta_z + u_{sg} \delta_z + \frac{1}{2} u_{s\eta} \delta_z + \frac{1}{2} u_{\eta\eta} \eta_z + \frac{1}{2} u_{\eta g} \delta_z + \frac{3}{2} u_{ss} \delta_z + \frac{3}{2} u_{s\eta} \eta_z + \frac{3}{2} u_{sg} \delta_z = \\ &= \frac{1}{4} u_{\eta\eta} - \frac{3}{4} u_{gg} + \frac{1}{2} u_{s\eta} - \frac{1}{2} u_{sg} + \frac{1}{2} u_{\eta g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= \frac{1}{2} u_{ss} \delta_y + \frac{1}{2} u_{s\eta} \eta_y + \frac{1}{2} u_{sg} \delta_y + \frac{1}{2} u_{ss} \delta_y + \frac{1}{2} u_{s\eta} \eta_y + \frac{1}{2} u_{sg} \delta_y = \\ &= \frac{1}{4} u_{\eta\eta} + \frac{1}{4} u_{gg} + \frac{1}{2} u_{\eta g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{zz} &= \frac{1}{2} u_{ss} \delta_z + \frac{1}{2} u_{s\eta} \eta_z + \frac{1}{2} u_{sg} \delta_z - \frac{1}{2} u_{ss} \delta_z - \frac{1}{2} u_{s\eta} \eta_z - \frac{1}{2} u_{sg} \delta_z = \\ &= \frac{1}{4} u_{\eta\eta} + \frac{1}{4} u_{gg} - \frac{1}{2} u_{\eta g} \end{aligned}$$

Убрштавање у почетну једначину добијемо:

$$\begin{aligned} &u_{ss} + \frac{1}{4} u_{\eta\eta} + \frac{9}{4} u_{gg} + u_{s\eta} + 3u_{sg} + \frac{3}{2} u_{\eta g} - u_{\eta\eta} - 3u_{ss} - 2u_{s\eta} - 2u_{sg} - 4u_{s\eta} + \\ &+ \frac{1}{2} u_{\eta\eta} - \frac{3}{2} u_{gg} + u_{s\eta} - u_{sg} + u_{ss} + u_{\eta\eta} + u_{gg} + 2u_{\eta g} + \frac{1}{4} u_{\eta\eta} + \frac{1}{4} u_{gg} - \frac{1}{2} u_{\eta g} = 0 \end{aligned}$$

$$u_{ss} + u_{\eta\eta} - u_{gg} = 0$$

Закључујемо да је дања парцијална диференцијална једначина хиперболичка типа.

III Вјеме

Парцијалне диференцијалне једначине

1. Превести на канонски облик једначину:

$$3u_{xy} - 2u_{yy} - 2u_{yz} + 4u = 0$$

Решение:

Одговарајућа квадратна форма је:

$$K(t_1, t_2, t_3) = 3t_2^2 - 2t_1t_2 - 2t_1t_3$$

$$3t_2^2 - 2t_1t_2 - 2t_1t_3 = \left(3t_2^2 - 2t_1t_2 - 2t_1t_3 + \frac{t_1^2}{3} + \frac{t_3^2}{3} + \frac{2}{3}t_1t_3 \right) - \frac{t_1^2}{3} - \frac{t_3^2}{3} - \frac{2}{3}t_1t_3 =$$

$$= \left(-\frac{t_1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}t_2 - \frac{t_3}{\sqrt{3}} \right)^2 - \left(\frac{t_1}{\sqrt{3}} + \frac{t_3}{\sqrt{3}} \right)^2$$

$$\zeta_1 = -\frac{t_1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}t_2 - \frac{t_3}{\sqrt{3}}$$

$$\zeta_2 = \frac{t_1}{\sqrt{3}} + \frac{t_3}{\sqrt{3}}$$

$$t_1 = \sqrt{3}\zeta_2 - t_3$$

$$t_2 = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{\sqrt{3}}$$

Добили смо систем од двије једначине са три непознате, који је сагласан и неодређен. Пошто нама треба сагласан и одређен систем (како да сачуна димензионалност, односно матрица B инвертибилна), узетимо $\zeta_3 = \frac{t_3}{\sqrt{3}}$, односно $t_3 = \sqrt{3}\zeta_3$

Дакле,

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Сачуна је дата са

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (B^{-1})^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}x + \frac{4}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{3}x + \sqrt{3}z \end{pmatrix}$$

Дакле, сменом x :

$$\begin{aligned} s &= \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \eta &= \sqrt{3}x + \frac{4}{\sqrt{3}} \\ \zeta &= -\sqrt{3}x + \sqrt{3}z \end{aligned}$$

Дакле x :

$$u_x = u_s s_x + u_\eta \eta_x + u_\zeta \zeta_x = \frac{1}{\sqrt{3}} u_s + \frac{1}{\sqrt{3}} u_\eta$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{3}} u_{ss} s_x + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{s\eta} \eta_x + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{s\zeta} \zeta_x + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta s} s_x + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\eta} \eta_x + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\zeta} \zeta_x = \\ &= u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} + u_{s\eta} - u_{\eta s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy} &= \frac{1}{\sqrt{3}} u_{ss} s_y + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{s\eta} \eta_y + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{s\zeta} \zeta_y + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta s} s_y + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\eta} \eta_y + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\zeta} \zeta_y = \\ &= \frac{1}{3} u_{ss} + \frac{1}{3} u_{\eta\eta} + \frac{2}{3} u_{s\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{zz} &= \frac{1}{\sqrt{3}} u_{ss} s_z + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{s\eta} \eta_z + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{s\zeta} \zeta_z + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta s} s_z + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\eta} \eta_z + \frac{1}{\sqrt{3}} u_{\eta\zeta} \zeta_z = \\ &= u_{s\zeta} + u_{\eta\zeta} \end{aligned}$$

Уврштавање у почетну једначину добијало:

$$u_{ss} + u_{\eta\eta} + \frac{2}{3} u_{s\eta} - 2u_{\eta\eta} + 2u_{s\zeta} - 2u_{s\eta} + 2u_{\eta\zeta} - 2u_{\zeta\zeta} - 2u_{\eta\zeta} + 4u = 0$$

$$u_{ss} - u_{\eta\eta} + 4u = 0$$

Закључујемо да је дата парцијална диференцијална једначина параболички типа.

вектори на канонски едни јединични:

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 + 4yz + 2xz = 0$$

Решава:

Одговарајући квадратна форма је:

$$K(t_1, t_2, t_3) = t_1^2 + 4t_2^2 + t_3^2 + 4t_1t_2 + 2t_1t_3 + 4t_2t_3$$

$$t_1^2 + 4t_2^2 + t_3^2 + 4t_1t_2 + 2t_1t_3 + 4t_2t_3 = (t_1 + 2t_2 + t_3)^2$$

$$\tau_1 = t_1 + 2t_2 + t_3$$

$$t_1 = \tau_1 - 2t_2 - t_3$$

Додели смо систем од једне јединичне ка три непознате, који је сингуларан и неодређен. Пошто нема тврда сагласан и одређен систем (како да се зна да је регуларна, односно матрица B инвертибилна), узелимо $\tau_2 = t_2$ и $\tau_3 = t_3$.

Дакле,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Систем је даћи са $\begin{pmatrix} s \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (B^{-1})^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} s \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x + y \\ -x + z \end{pmatrix}$$

Дакле, систем је:

$$\begin{cases} s = x \\ \eta = -2x + y \\ \zeta = -x + z \end{cases}$$

2. a. 3:

$$u_x = u_{1x} \delta_x + u_{2x} \delta_y + u_{3x} \delta_z = u_{1x} - 2u_{2x} + u_{3x}$$

$$u_y = u_{1y} \delta_x + u_{2y} \delta_y + u_{3y} \delta_z = u_{2y}$$

$$u_z = u_{1z} \delta_x + u_{2z} \delta_y + u_{3z} \delta_z = u_{3z}$$

$$u_{xx} = u_{1xx} \delta_x + u_{2xx} \delta_y + u_{3xx} \delta_z - 2u_{1xy} \delta_x - 2u_{1xz} \delta_y - u_{2yy} \delta_x - u_{2yz} \delta_y - u_{3zz} \delta_x - u_{3zy} \delta_y - u_{3zx} \delta_z =$$

$$= u_{1xx} + 4u_{2xy} + u_{3zz} - 4u_{1xy} - 2u_{2yy} + 4u_{3xz}$$

$$u_{yy} = u_{1yy} \delta_x + u_{2yy} \delta_y + u_{3yy} \delta_z = u_{2yy} - 2u_{2xy} - u_{2yz}$$

$$u_{zz} = u_{1zz} \delta_x + u_{2zz} \delta_y + u_{3zz} \delta_z = u_{3zz} - 2u_{3zy} - u_{3zx}$$

$$u_{xy} = u_{1xy} \delta_x + u_{2xy} \delta_y + u_{3xy} \delta_z = u_{2xy}$$

$$u_{yz} = u_{1yz} \delta_x + u_{2yz} \delta_y + u_{3yz} \delta_z = u_{2yz}$$

$$u_{zx} = u_{1zx} \delta_x + u_{2zx} \delta_y + u_{3zx} \delta_z = u_{3zx}$$

Упрощаем уравнение, учитывая граничные условия:

$$u_{1xx} + 4u_{2xy} + u_{3zz} - 4u_{1xy} - 2u_{2yy} + 4u_{3xz} + 4u_{2xy} - 2u_{2xy} - 4u_{2yz} + 4u_{3xz} - 2u_{2yy} - 2u_{2yz} + 4u_{3xz} + 2u = 0$$

$$u_{3zz} + 2u = 0$$

Задача решена, так как граничные условия выполнены дифференциальными уравнениями.

$$a(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$$

$$F(x,y,u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = A(x,y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)u + f(x,y)$$

Српјетом

$$\xi = \xi(x,y)$$

$$\eta = \eta(x,y)$$

макар га је $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$ (урачунати)

српје) једначина се доводи на канонски облик.

Српјеу дођујемо као рјешене једначине

$$a(x,y) (dy)^2 - 2b(x,y) dx dy + c(x,y) (dx)^2 = 0$$

односно

$$a(x,y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x,y) \frac{dy}{dx} + c(x,y) = 0$$

Означимо $\frac{dy}{dx} = t$, дођујемо

$$a(x,y) t^2 - 2b(x,y) t + c(x,y) = 0$$

та је

$$t_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

Дискриминанта је $\Delta = b^2 - ac$.

I $\Delta > 0 \Rightarrow$ једначина је решена у реалним бројевима

$$t_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

Решавајући дођујемо једначине дођујемо српјеу

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y)$$

којом се почетна једначина своди на

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \eta} = F(s, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial \eta})$$

Служен $s = d + \beta$, $\eta = d - \beta$ се годљена једначина миме своди

$$\text{на } \frac{\partial^2 u}{\partial d^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = F(d, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial d}, \frac{\partial u}{\partial \beta})$$

II $\Delta = 0 \Rightarrow$ једначина је параболичкој тип

$$t = \frac{b}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

Решавајући годљену једначину годљеном служеном

$$s = \Psi(x, y)$$

За $\eta = \Psi(x, y)$ може изабрати произвољну функцију

Ψ такву да је служба регуларна, тј. да је

$$\frac{D(s, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$$

Ова служба се почетна једначина своди на

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(s, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial \eta})$$

III $\Delta < 0 \Rightarrow$ једначина је елиптичкој тип

$$t = \frac{b \pm i \sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i \sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Решавајући годљене једначине годљеном

$$d(x, y) = \Psi(x, y) + i \Phi(x, y) = c$$

или се служено дало $s = \Psi(x, y)$, $\eta = \Phi(x, y)$.

Ова служба се почетна једначина своди на

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F(s, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial \eta})$$

типи опште решење једначине:

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$$

Решење:

$$\left. \begin{array}{l} a = x^2 \\ b = 0 \\ c = -y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta = b^2 - ac = -x^2 y^2$$

I За $x=0$ или $y=0$ је $\Delta=0$, та је једначина параболичка типа

II За $x \neq 0$ и $y \neq 0$ је $\Delta < 0$, та је једначина хиперболичка типа

I а) $x=0$.

Једначина постаје

$$-y^2 u_{yy} = 0 \Rightarrow u_{yy} = 0 \Rightarrow u_y = c(x) \Rightarrow u = c(x)y + f(x), \text{ где } c, f \in C^2(\mathbb{R})$$

д) $y=0$

Једначина постаје

$$x^2 u_{xx} = 0 \Rightarrow u_{xx} = 0 \Rightarrow u_x = c(y) \Rightarrow u = c(y)x + f(y), \text{ где } c, f \in C^2(\mathbb{R})$$

II

$x \neq 0$ и $y \neq 0$

а) $x > 0, y > 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 y^2}}{x^2} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c$$

$$\ln \frac{y}{x} = c$$

$$\frac{y}{x} = c = \eta$$

и

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{x^2 y^2}}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + c$$

$$\ln xy = c$$

$$xy = c = \eta$$

$$s_x = -\frac{y}{x^2} \quad s_y = \frac{1}{x}$$

$$\eta_x = y \quad \eta_y = x$$

$$\frac{D(s, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{2y}{x} \neq 0 \quad \text{za } x > 0, y > 0 \Rightarrow \text{Cijena je regular}$$

$$u_x = u_s s_x + u_\eta \eta_x = -\frac{y}{x^2} u_s + y u_\eta$$

$$u_y = u_s s_y + u_\eta \eta_y = \frac{1}{x} u_s + x u_\eta$$

$$u_{xx} = \frac{2y}{x^3} u_s - \frac{y}{x^2} (u_{ss} s_x + u_{s\eta} \eta_x) + y (u_{ns} s_x + u_{n\eta} \eta_x) =$$

$$= \frac{2y}{x^3} u_s + \frac{y^2}{x^4} u_{ss} - \frac{2y^2}{x^2} u_{s\eta} + y^2 u_{n\eta}$$

$$u_{yy} = \frac{1}{x} (u_{ss} s_y + u_{s\eta} \eta_y) + x (u_{ns} s_y + u_{n\eta} \eta_y) = \frac{1}{x^2} u_{ss} + 2u_{s\eta} + x^2 u_{n\eta}$$

Ubrinjavamo u poređnu jednadžbu godujamo

$$\frac{2y}{x} u_s + \frac{y^2}{x^2} u_{ss} - 2y^2 u_{s\eta} + x^2 y u_{n\eta} - \frac{y^2}{x^2} u_{ss} - 2y^2 u_{s\eta} - x^2 y^2 u_{n\eta} = 0$$

$$-4y^2 u_{s\eta} + \frac{2y}{x} u_s = 0$$

Uvedemo kemo $y^2 = yx \cdot \frac{y}{x} = s \eta$

Godujamo

$$-4s\eta u_{s\eta} + 2s u_s = 0 \quad | \cdot \frac{1}{2s}$$

$$2\eta u_{s\eta} - u_s = 0$$

Teka je $u_s(s, \eta) = \vartheta(\eta)$

Jednadžba postaje

$$2\eta \vartheta' - \vartheta = 0$$

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{d\eta}{2\eta}$$

$$\ln |\vartheta| = \frac{1}{2} \ln |\eta| + c$$

$$\vartheta = c\sqrt{\eta}$$

$$u_s(s, \eta) = c(s)\sqrt{\eta}$$

$$u = c_1(s)\sqrt{\eta} + c_2(\eta), \text{ gdje je } c_1(s) = \int c(s) ds, \text{ a } c_1 \in C^1(\mathbb{R}), c_2 \in C(\mathbb{R})$$

~~ce~~

$$x > 0, y < 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 y^2}}{x} = \frac{-y}{x} \quad \wedge \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{x^2 y^2}}{x^2} = \frac{y}{x}$$

Одговоре добијемо $\xi = \frac{y}{x}, \eta = xy$, па се једначина своди на случај а)

$$b) x < 0, y > 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 y^2}}{x^2} = \frac{-y}{x} \quad \wedge \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{x^2 y^2}}{x^2} = \frac{y}{x}$$

Одговоре добијемо $\xi = \frac{y}{x}, \eta = xy$, па се једначина своди на случај а).

$$c) x < 0, y < 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 y^2}}{x^2} = \frac{y}{x} \quad \wedge \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{x^2 y^2}}{x^2} = -\frac{y}{x}$$

Одговоре добијемо $\xi = \frac{y}{x}, \eta = xy$, па се једначина своди на случај а).